

第 10 届 CPHO-S 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2022 年 7 月 2 日 9:00—12:00

命题人：侯宗岳 黄文杰 杨宸嶒 孟飞扬 史景喆

审题人：杨汝嘉 罗民睿 陆 宸 郭锐冰 蔡一在

王梓人 李忆唐 胡宸源 陈浩楠 李瀚奕

一、(40 分)

如俯视图 1.1 所示，空间中有竖直向下的恒定匀强磁场 B ，光滑水平刚性地面上有两块相同的轻质压电晶体，它们的左极板和右极板都相互平行，且各被一个可忽略电阻的 Π 形刚性光滑细导体导轨刚连接。两导轨形状相同，两平行线部分间距均为 l ，可在垂直于压电晶体极板的方向上平动。初始时两压电晶体都处于自由平衡状态，且极板上无电荷积累、极板间无电势差。现对导轨在垂直于极板的方向上做微扰动。

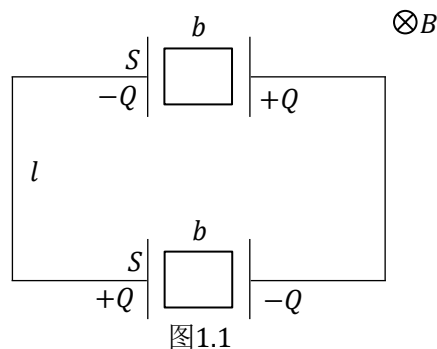


图 1.1

已知本题所用压电晶体极板为导体，面积 S ，两极板平衡间距 b ， $S \gg b^2$ 以至于可以视为平行板电容器，振动幅度远小于 b 以至于在计算电场时可认为两极板间距始终为 b 。忽略极板间静电力。拉伸两极板并在两极板间加电压时会产生应变和电荷积累，满足压电方程：

$$\begin{cases} \xi = \alpha E + \frac{1}{Y} \sigma \\ D = \epsilon E + \alpha \sigma \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 E 为电场， D 为电位移， $\xi = \frac{x}{b}$ 是应变， x 是极板间距增加量， $\sigma = \frac{F}{S}$ 是应力， F 是拉力，

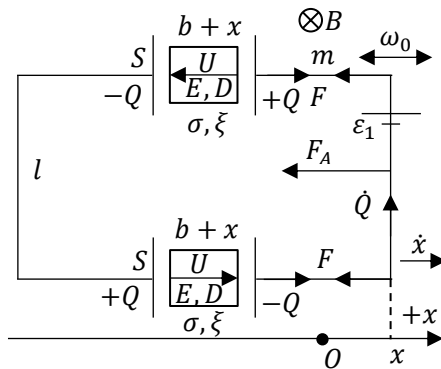
α, ϵ, Y 均为常数。拉伸上下两块压电晶体时电荷积累方向相反，电荷正负号如图 1.1 中所约定。

(1) 若左导轨固定于地面，右导轨（连同其固连的两块极板）质量为 m ，可在垂直于压电晶体板的方向上自由平动，求右导轨小振动的角频率 ω_0 。

(2) 若左导轨（连同其固连的两块极板）质量 m_1 ，右导轨（连同其固连的两块极板）质量 m_2 ，两导轨均可在垂直压电晶体板的方向上自由平动，求左右导轨共同小振动的角频率 ω 。

解：

(1) 如右图所示设参数。



首先列方程。

牛顿第二定律：

$$m\ddot{x} = -F_A - 2F \quad (1)$$

安培力

$$F_A = B\dot{Q}l \quad (2)$$

回路电压方程：

$$\varepsilon_1 = 2U \quad (3)$$

感应电动势

$$\varepsilon_1 = Bl\dot{x} \quad (4)$$

由题意近似得电场

$$E = \frac{U}{b} \quad (5)$$

电位移的高斯定理：

$$DS = Q \quad (6)$$

由题中定义得应变

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (7)$$

与应力

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (8)$$

由题意，压电方程：

$$\begin{cases} \xi = \alpha E + \frac{1}{Y}\sigma \\ D = \varepsilon E + \alpha\sigma \end{cases} \quad (9)$$

然后解方程。

将 (2) 式代入 (1) 式得

$$m\ddot{x} + Bl\dot{Q} + 2F = 0 \quad (10)$$

将 (3) (4) (5) (7) (8) 式代入 (9) 的第一式得

$$\frac{x}{b} = \alpha \frac{Bl\dot{x}}{2b} + \frac{1}{Y} \frac{F}{S} \quad (11)$$

将 (3) (4) (5) (6) (8) 式代入 (9) 的第二式得

$$\frac{Q}{S} = \varepsilon \frac{Bl\dot{x}}{2b} + \alpha \frac{F}{S} \quad (12)$$

联立 (10) (11) (12) 式得

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2) = 0 \quad (24)$$

因此，该系统的两个自由度中一个为平动自由度。为考察另一个，换元

$$x = x_2 - x_1 \quad (25)$$

并记折合质量

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m \quad (26)$$

则由 (15) 式可导出

$$m\ddot{x} = -F_A - 2F \quad (27)$$

(17) (18) 式变为

$$Bl\dot{x} = 2U \quad (28)$$

(21) 式变为

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (29)$$

则所有方程形式上和第 (1) 问一致，所以由 (1) 问，也有解

$$\omega = \sqrt{\frac{4YS}{2bm + B^2 l^2 S(\varepsilon - \alpha^2 Y)}} \quad (30)$$

只不过这里的 m 为折合质量。所以用 m_1, m_2 表达的解为

$$\omega = \sqrt{\frac{4YS(m_1 + m_2)}{2bm_1 m_2 + B^2 l^2 S(\varepsilon - \alpha^2 Y)(m_1 + m_2)}} \quad (31)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 23 分：(13) (14) 式各 3 分，(1) (9) (10) (11) (12) 式各 2 分，(2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) 式各 1 分；

第 (2) 问 17 分：(15) (18) (23) 式各 2 分，(16) (17) (19) (20) (21) (22) (24) (27) (28) (29) (31) 式各 1 分。

注：带有大括号的联立等式，如果只完全答对其中的部分，给一半分。

二、(40 分)

本题研究点光源发出的非傍轴光线入射到轴对称光学元件上时反射、折射的成像规律。记光学元件的对称轴为 l ，在 l 上取在光学元件内的一个标记点 A ，点光源为 S ，其像为 S' 。记 SA 与 l 夹角为 θ （不能认为 $\theta \ll 1$ ）。记 $|SA| = u, |S'A| = v$ ，具体的正方向见图。 $|AS|$ 与光学元件的特征曲率半径同数量级，且都远大于光学元件的尺寸，以至于从点光源发出、能射入光学元件的光线仅在一个很小的发散角内。已知不会发生全反射。

注意：如果考虑三维情形，即使入射光束足够细，本题情况下也会产生像差。为降低难度，以下各个小问均只考虑纸面内的光线。

(1) 如图2.1所示，如果光学元件是球心为 O 、曲率半径为 R 的凹面镜，求 u, v, R, θ 满足的关系。

(2) 如图2.2所示，如果光学元件是球心为 O ，曲率半径为 R ，球心在镜左侧的球面折射镜，左、右半空间折射率分别为 n_1, n_2 ，求 $u, v, R, n_1, n_2, \theta$ 满足的关系。为了增强答案的对称性，记 $\theta_1 = \theta, \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right)$ ，将你的答案用 $u, v, R, n_1, n_2, \theta_1, \theta_2$ 表达。

(3) 如图2.3所示，如果光学元件是真空中光心为 A 、内部折射率为 n 、左右表面曲率半径均为 R 的凸透镜，求 u, v, R, n, θ 满足的关系。

解：

（为方便观察，以下光路图均夸大了小角度）

(1) 光路图如右图所示。 $\gamma_1, \gamma_2 \approx \theta$ 。图中除了 γ_1, γ_2 ，所有用字母标注的角度均为小角度。图中凹面镜两处表面的反射角和入射角分别均设为 γ_1, γ_2 ，这里已经用了反射定律。

小角度近似下几何关系：

$$\alpha = \frac{d \cos \theta}{u} \quad (1)$$

$$\beta = \frac{d \cos \theta}{v} \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{d}{R} \quad (3)$$

几何关系：

$$\alpha + \gamma_1 = \varphi + \gamma_2 \quad (4)$$

$$\varphi + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 \quad (5)$$

联立 (1) (2) (3) (4) (5) 式得 u, v, R, θ 满足关系：

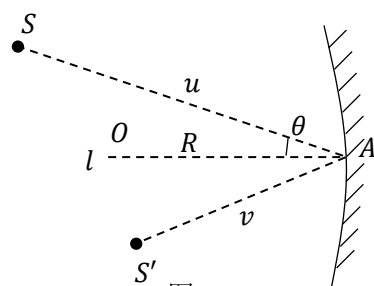


图2.1

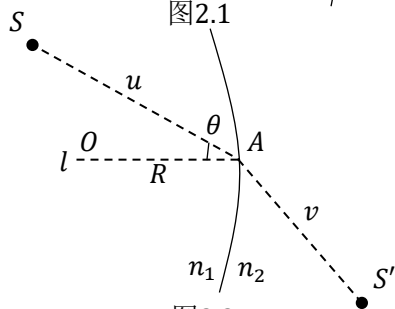


图2.2

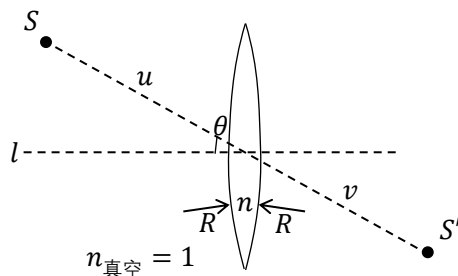
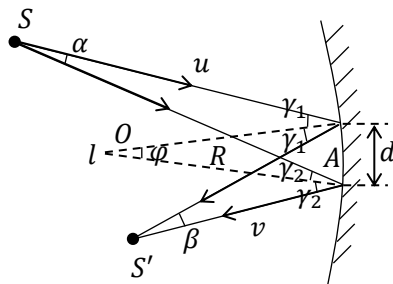
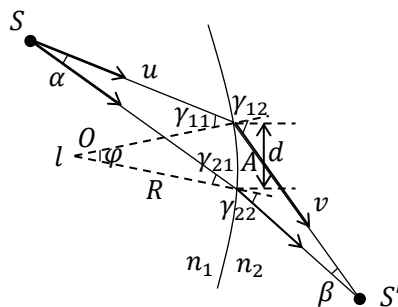


图2.3



$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R \cos \theta} \quad (6)$$

(2) 光路图如右图所示。 $\gamma_{11}, \gamma_{21} \approx \theta_1, \gamma_{12}, \gamma_{22} \approx \theta_2$ 。图中除了 $\theta_1, \theta_2, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$, 所有用字母标注的角度均为小角度。记 $\gamma_{ij} = \theta_j + \Delta\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$, 则 $\Delta\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$ 也是小角度。由题意, θ_1, θ_2 满足 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, 所以 θ_2 就是 AS' 与 l 所夹锐角, 这里已经用了折射定律。



折射定律:

$$n_1 \sin \gamma_{11} = n_2 \sin \gamma_{12} \quad (7)$$

$$n_1 \sin \gamma_{21} = n_2 \sin \gamma_{22} \quad (8)$$

代入 $\gamma_{ij} = \theta_j + \Delta\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$ 并小角度近似得

$$n_1 \cos \theta_1 \Delta \gamma_{11} = n_2 \cos \theta_2 \Delta \gamma_{12} \quad (9)$$

$$n_1 \cos \theta_1 \Delta \gamma_{21} = n_2 \cos \theta_2 \Delta \gamma_{22} \quad (10)$$

小角度近似下几何关系:

$$\alpha = \frac{d \cos \theta_1}{u} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{d \cos \theta_2}{\eta} \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{d}{R} \quad (13)$$

几何关系:

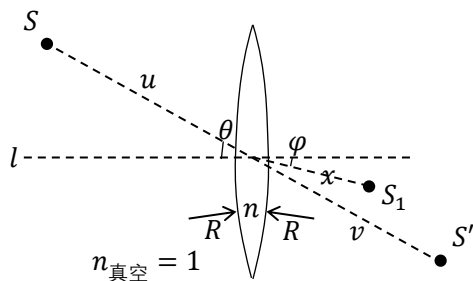
$$\alpha + \gamma_{11} = \varphi + \gamma_{21} \quad (14)$$

$$\gamma_{12} = \varphi + \beta + \gamma_{22} \quad (15)$$

联立(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)式, 代入 $\gamma_{ij} = \theta_j + \Delta\gamma_{ij}, i, j = 1, 2$ 得 $u, v, R, n_1, n_2, \theta_1, \theta_2$ 满足关系:

$$\frac{n_1 \cos^2 \theta_1}{u} + \frac{n_2 \cos^2 \theta_2}{v} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{R} \quad (16)$$

(3) 如右图所示, 设 S 经透镜左表面折射成像于 S_1 , S_1 再经透镜右表面折射成像于 S' 。



由 (2) 中结论,

$$\frac{\cos^2 \theta}{u} + \frac{n \cos^2 \varphi}{x} = \frac{n \cos \varphi - \cos \theta}{R} \quad (17)$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{n} + \frac{n \cos^2 \varphi}{-x} = \frac{n \cos \varphi - \cos \theta}{R} \quad (18)$$

$$\sin \theta = n \sin \varphi \quad (19)$$

联立 (17) (18) (19) 式得 u, v, R, n, θ 满足关系:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2(\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta)}{R \cos^2 \theta} \quad (20)$$

评分标准: 本题满分 40 分, 每式 2 分。

第 (1) 问 12 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 2 分;

第 (2) 问 20 分: (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) 式各 2 分;

第 (3) 问 8 分: (17) (18) (19) (20) 式各 2 分。

三、(40 分)

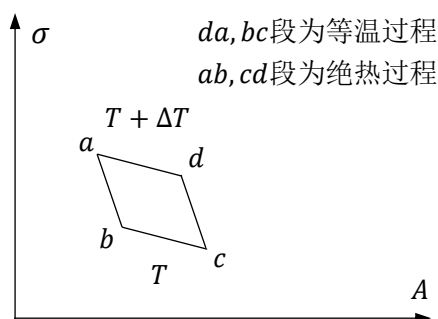


图3.1

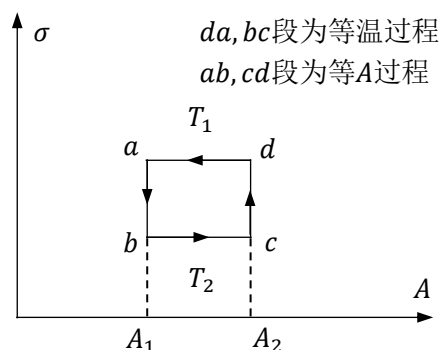


图3.2

已知某种界面的表面张力系数在某个温度区间内随着温度递减, 并且近似正比于温度的平方根, 也就是 $\sigma(T) = K\sqrt{T}$, 而表面张力做的元功为 $dW = \sigma dA$ 。

(1) 考虑如图3.1所示的循环过程, 并由此推出 $\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_T$, 用 $\sigma(T), T, \frac{d\sigma(T)}{dT}$ 表达。

(2) 证明在我们考虑的范围, 表面系统的内能正比于表面系统的面积, 并由此计算系统的内能表达式。

(3) 计算系统的熵, 并得出绝热过程方程。

(4) 考虑如图3.2所示的循环过程, 计算其效率。

解:

(1) 考虑循环过程 $abcda$, 因为循环过程中的 $\Delta A, \Delta \sigma$ 足够小, 以至于循环过程可以近似看作一个平行四边形。吸热量的绝对值为:

$$\Delta Q = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_T \Delta A + \sigma(T) \Delta A \quad (1)$$

循环过程的总功为:

$$\Delta W = \Delta A \Delta \sigma \quad (2)$$

根据卡诺定理:

$$\frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad (3)$$

由 (1) (2) (3) 式并略去高阶小量得：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_T = -T \frac{d\sigma}{dT} + \sigma \quad (4)$$

(2) 式代入 $\sigma(T) = \frac{K}{T}$ 得：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_T = \frac{1}{2} K \sqrt{T} \quad (5)$$

因为在我们考虑的范围内，表面系统的内能正比于表面系统的面积，所以 $U = u(T)A$ ，所以

$$U = \frac{1}{2} K \sqrt{T} A \quad (6)$$

(3) 由热力学基本微分方程： $dU = TdS + \sigma dA$ 得到：

$$dS = -\frac{K}{2T^{\frac{3}{2}}} dA + \frac{KA}{4T^{\frac{3}{2}}} dT \quad (7)$$

积分得：

$$S = S_0 - \frac{K}{2T^{\frac{1}{2}}} A \quad (8)$$

绝热过程熵增为零，所以：

$$\frac{A^2}{T} = \text{Const} \quad (9)$$

(4) 由热力学第一定律 $dQ = dU - \sigma dA$ ，
得到 da 过程吸热为：

$$Q_{da} = \frac{1}{2} K \sqrt{T_1} A_1 - \frac{1}{2} K \sqrt{T_1} A_2 - K \sqrt{T_1} (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} K \sqrt{T_1} (A_2 - A_1) \quad (10)$$

cd 过程吸热为：

$$Q_{cd} = \frac{1}{2} K \sqrt{T_1} A_2 - \frac{1}{2} K \sqrt{T_2} A_2 \quad (11)$$

总吸热量为：

$$Q = K \sqrt{T_1} A_2 - \frac{1}{2} K (\sqrt{T_1} A_1 + \sqrt{T_2} A_2) \quad (12)$$

总做功为：

$$W = (K \sqrt{T_1} - K \sqrt{T_2}) (A_2 - A_1) \quad (13)$$

效率为：

$$\eta = \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})(A_2 - A_1)}{\sqrt{T_1} A_2 - \frac{1}{2} (\sqrt{T_1} A_1 + \sqrt{T_2} A_2)} \quad (14)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 14 分：(1) (4) 式各 4 分，(2) (3) 式各 3 分；

第 (2) 问 6 分：(5) (6) 式各 3 分；

第 (3) 问 9 分：(7) (8) (9) 式各 3 分；

第 (4) 问 11 分：(10) (11) (12) (13) 式各 2 分，(14) 式 3 分。

四、(40 分)

本题考查门在静力平衡时不发生自锁的条件。自锁，在这里指无论在门上加多大的力矩，都无法将门关上。如能在门的设计过程中避免自锁，则在使用时就能方便地不用门把手关门。我们建立以下简化模型进行讨论。

如俯视图4.1所示，有一由轻质刚体A、轻质理想弹簧B、刚体C构成的门。C左侧开有直角凹槽，C可绕竖直转轴E无摩擦转动。A在俯视图中位形为梯形，宽度为 $2b$ ，靠下的较短的底长为 a ，最小的内角为 α 。A通过B与C连接，可在C的槽内直线滑动，与C的槽内壁的静摩擦系数和滑动摩擦系数同为 μ_2 。B的劲度系数为 k ，左右两端点分别固连于A的右端中点和C的槽的右端中点，取向平行于A相对C的滑动方向，处于原长时A的左下顶点和C的左端对齐，设其当前相对原长压缩 x 。门左边恰当位置有固定于地面的刚体D，其与A的静摩擦系数和滑动摩擦系数同为 μ_1 ，当前D的右表面和C的左端面平行，且距离为 s 。

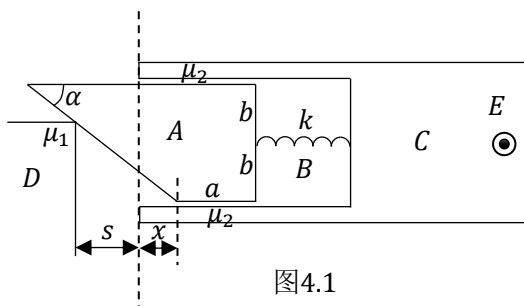


图4.1

在本题中，忽略A受到的除B提供的弹力以外的其他主动外力，即不使用门把手。C的槽内壁宽度比A的宽度略大一点，使不会出现A的上下两面都与C的槽内壁有面接触的情况。在本题中不考虑在A完全缩入C的槽中之后C的转动、A的弹入D的槽（未在图上画出）中等过程。不考虑D、A和C的位形对 s 取值的限制，即假定 $s < 0$ 的平衡状态也是物理上允许的。本题只考察门在右上图所示静力平衡状态下不发生自锁的条件。

在不发生自锁的条件下，可以按临界平衡状态（即将要滑动的状态）的类型对 s 的取值分类：

$$p_1(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + q_1(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \frac{s+x}{\cos \alpha} \leq p_2(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + q_2(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha):$$

不发生自锁且临界平衡状态为单面接触；

$$p_2(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + q_2(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \frac{s+x}{\cos \alpha} \leq p_3(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + q_3(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha):$$

不发生自锁且临界平衡状态为两点接触（实为两线接触，在上面的投影图中表现为两点接触）。

以上两式中的 $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ 均只与 μ_2, a, b, x 有关。求 $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ ，以及存在 s 使得不发生自锁的情况下， μ_1, μ_2, α 需满足的条件。

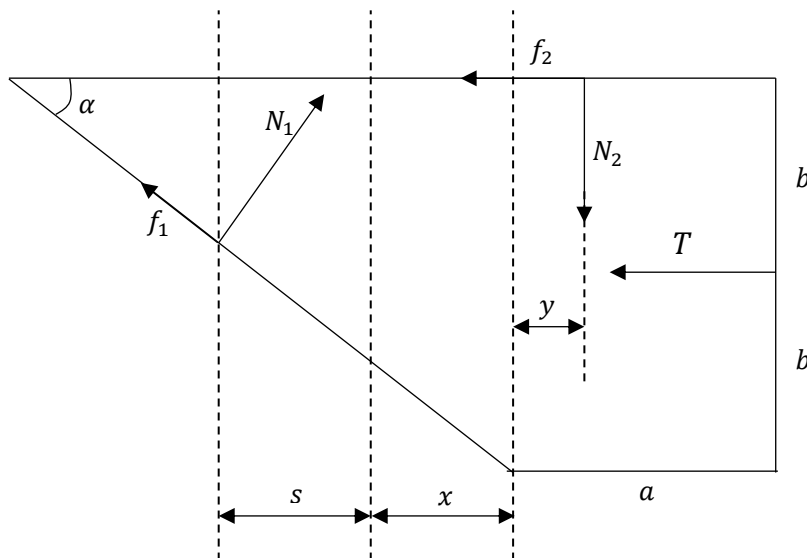
解：

（以下“两点接触”均实为两线接触，在投影图中表现为两点接触）

解法一：代数法。

A) 不发生自锁且临界平衡状态为单面接触：

与C接触的必定是A的上表面。对A的受力分析和参数设定如下图所示。



上下方向受力平衡：

$$N_2 = N_1 \cos \alpha + f_1 \sin \alpha \quad (1)$$

左右方向受力平衡：

$$T + f_2 = N_1 \sin \alpha - f_1 \cos \alpha \quad (2)$$

对P点力矩平衡：

$$N_2(y + 2b \cot \alpha) + Tb = N_1 \left(\frac{2b}{\sin \alpha} - \frac{s + x}{\cos \alpha} \right) \quad (3)$$

C逆时针滑动临界要求

$$f_1 = \mu_1 N_1 \quad (4)$$

$$f_2 = \mu_2 N_2 \quad (5)$$

联立解得

$$N_1 = \frac{1}{(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - \mu_2(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha)} T \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha}{(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - \mu_2(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha)} T \quad (7)$$

$$y = \frac{\frac{2b}{\sin \alpha} - \frac{s + x}{\cos \alpha} - b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha} + \mu_2 b - 2b \cot \alpha \quad (8)$$

不发生自锁要求

$$N_1 \geq 0 \quad (9)$$

$$N_2 \geq 0 \quad (10)$$

代入 (6) (7) 式得

$$(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - \mu_2(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \geq 0 \quad (11)$$

化简分析得要求为

$$\mu_1 \mu_2 \leq 1 \quad (12)$$

$$\tan \alpha \geq \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \quad (13)$$

临界平衡状态为单面接触要求

$$-x \leq y \leq a \quad (14)$$

代入 (8) 式得

$$b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (\mu_2 b - a)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \frac{s+x}{\cos \alpha} \quad (15)$$

$$\frac{s+x}{\cos \alpha} \leq b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (x + \mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \quad (16)$$

于是, 和题干比对得

$$p_1 = b \quad (17)$$

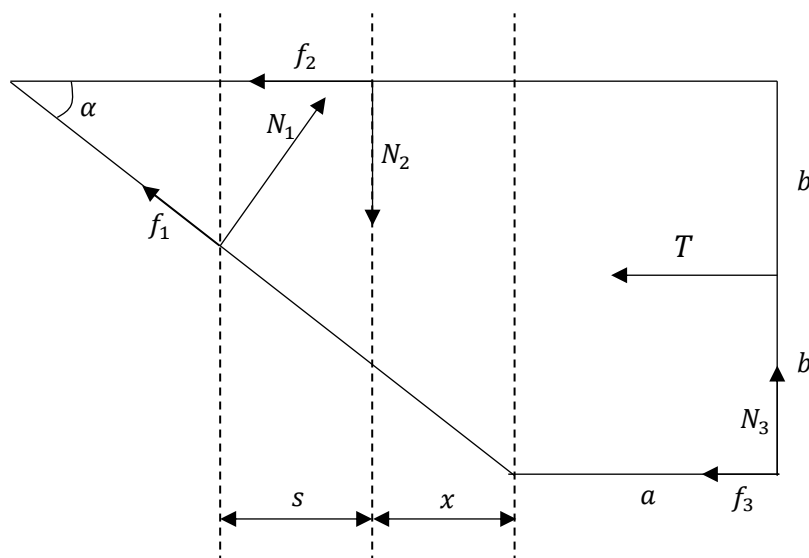
$$q_1 = \mu_2 b - a \quad (18)$$

$$p_2 = b \quad (19)$$

$$q_2 = x + \mu_2 b \quad (20)$$

并且, 由于 $x > 0$, 验证得 (15) (16) 式总是不矛盾。

B) 不发生自锁且临界平衡状态为两点接触:



接触必定发生在A的右下顶点处和C的凹槽的左上顶点处。对A的受力和参数设定如上图所示。

上下方向受力平衡:

$$N_2 = N_3 + N_1 \cos \alpha + f_1 \sin \alpha \quad (21)$$

左右方向受力平衡:

$$T + f_3 + f_2 = N_1 \sin \alpha - f_1 \cos \alpha \quad (22)$$

对Q点力矩平衡:

$$N_1 \frac{s+x}{\cos \alpha} = f_2 \cdot 2b + N_2 x + Tb + N_3 a \quad (23)$$

C逆时针滑动临界要求

$$f_1 = \mu_1 N_1 \quad (24)$$

$$f_2 = \mu_2 N_2 \quad (25)$$

$$f_3 = \mu_2 N_3 \quad (26)$$

联立解得

$$N_1 = \frac{T(x+a)}{(a+x+2\mu_2 b)(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + \mu_2(x-a+2\mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) - 2\mu_2 \frac{s+x}{\cos \alpha}} \quad (27)$$

$$N_3 = \frac{T\left(\frac{s+x}{\cos \alpha} - b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - (x+\mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha)\right)}{(a+x+2\mu_2 b)(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + \mu_2(x-a+2\mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) - 2\mu_2 \frac{s+x}{\cos \alpha}} \quad (28)$$

不发生自锁要求

$$N_1 \geq 0 \quad (29)$$

$$N_2 \geq 0 \quad (30)$$

$$N_3 \geq 0 \quad (31)$$

但由 (21) (24) 式, 若 (29) (31) 式成立, (30) 式会自动成立, 所以仅需考虑 (29)

(31) 式。将 (27) (28) 式代入 (29) (31) 式得

$$b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (x+\mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \frac{s+x}{\cos \alpha} \quad (32)$$

$$\frac{s+x}{\cos \alpha} \leq \left(\frac{a+x}{2\mu_2} + b\right)(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \mu_2 b\right)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \quad (33)$$

于是, 和题干比对得

$$p_2 = b \quad (34)$$

$$q_2 = x + \mu_2 b \quad (35)$$

$$p_3 = \frac{a+x}{2\mu_2} + b \quad (36)$$

$$q_3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \mu_2 b \quad (37)$$

(32) 式和 (16) 式恰好覆盖了 s 所有的取值, 所以 (34) (35) 式和 (19) (20) 式相同。
要让 (32) (33) 式不矛盾, 等价于要求

$$b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (x+\mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \left(\frac{a+x}{2\mu_2} + b\right)(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \mu_2 b\right)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \quad (38)$$

化简分析得要求为

$$\mu_1 \mu_2 \leq 1 \quad (39)$$

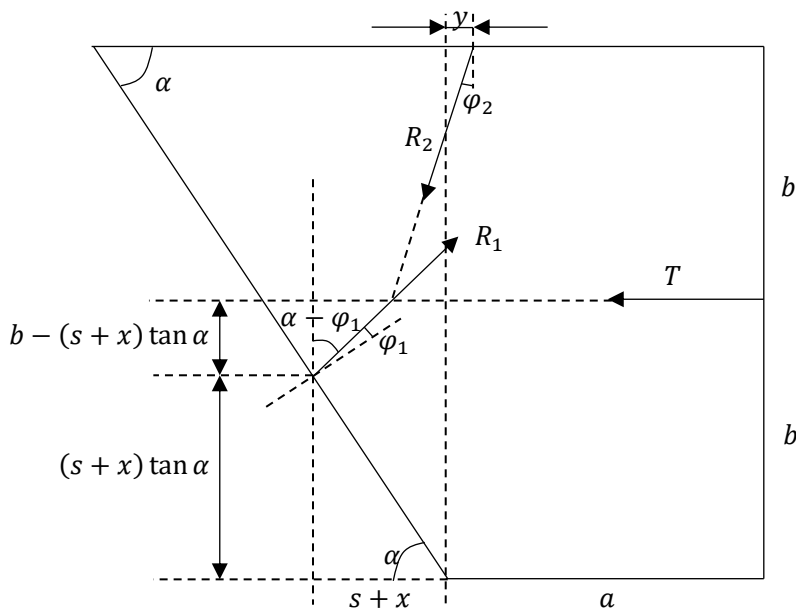
$$\tan \alpha \geq \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \quad (40)$$

(39) (40) 式与 (12) (13) 式相同, 这意味着如果存在不发生自锁的 s , 就存在不发生自锁且临界平衡状态为两点接触的 s 。

解法二: 几何法。

A) 不发生自锁且临界平衡状态为单面接触:

与C接触的必定是A的上表面。对A的受力分析和参数设定如下图所示。



摩擦角满足

$$\tan \varphi_1 = \mu_1 \quad (1^*)$$

$$\tan \varphi_2 = \mu_2 \quad (2^*)$$

力的矢量三角形首尾相接要求

$$\varphi_1 + \varphi_2 < \alpha \quad (3^*)$$

代入 (1*) (2*) 式, 三角变换得条件

$$\mu_1 \mu_2 < 1 \quad (4^*)$$

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} < \tan \alpha \quad (5^*)$$

由三力共点的几何关系, 得

$$y = (b - (s+x)\tan \alpha) \tan(\alpha - \varphi_1) + b \tan \varphi_2 - s - x \quad (6^*)$$

临界平衡状态为单面接触要求

$$-x \leq y \leq a \quad (7^*)$$

代入 (6*) 式得

$$b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (\mu_2 b - a)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \leq \frac{s+x}{\cos \alpha} \quad (8^*)$$

$$\frac{s+x}{\cos \alpha} \leq b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (x + \mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \quad (9^*)$$

于是, 和题干比对得

$$p_1 = b \quad (10^*)$$

$$q_1 = \mu_2 b - a \quad (11^*)$$

$$p_2 = b \quad (12^*)$$

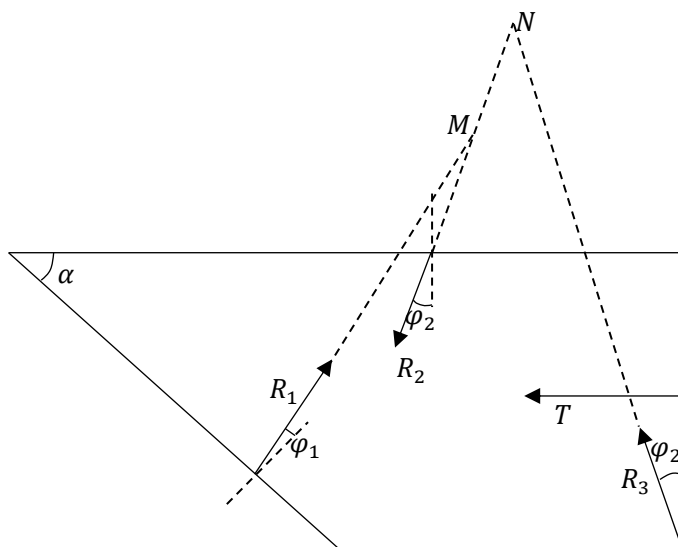
$$q_2 = x + \mu_2 b \quad (13^*)$$

并且, 由于 $x > 0$, 验证得 (8*) (9*) 式总是不矛盾。

B) 不发生自锁且临界平衡状态为两点接触:

接触必定发生在A的右下顶点处和C的凹槽的左上顶点处。对A的受力分析和参数设定如下

图所示。(下图较为简略, 多个参数未标明, 因为真正的分析用图在下面, 不是这个) 记 R_1 和 R_2 的作用线交于 M 点, R_2 和 R_3 的作用线交于 N 点。



摩擦角满足

$$\tan \varphi_1 = \mu_1 \quad (14^*)$$

$$\tan \varphi_2 = \mu_2 \quad (15^*)$$

不发生自锁要求

$$R_1 \geq 0 \quad (16^*)$$

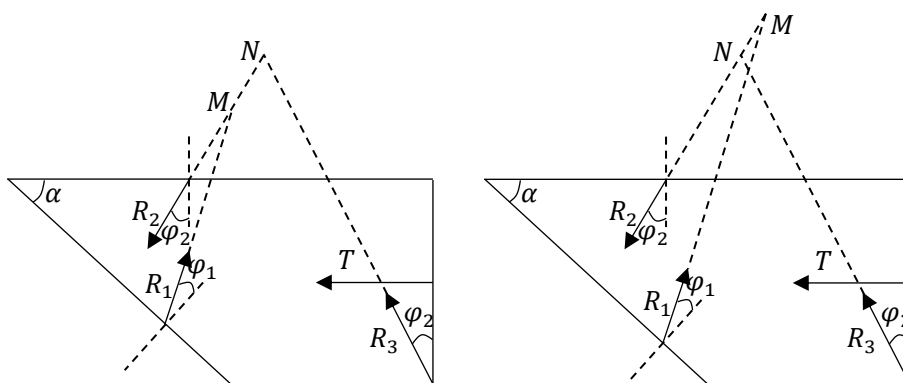
$$R_2 \geq 0 \quad (17^*)$$

$$R_3 \geq 0 \quad (18^*)$$

由图, 必须有

$$\varphi_1 + \varphi_2 < \alpha \quad (19^*)$$

否则, 如果 M 点在 N 点的左下方, 则会如左下图所示, 绕 N 点无法力矩平衡; 如果 M 点在 N 点的右上方, 则会如右下图所示, 绕 M 点无法力矩平衡。



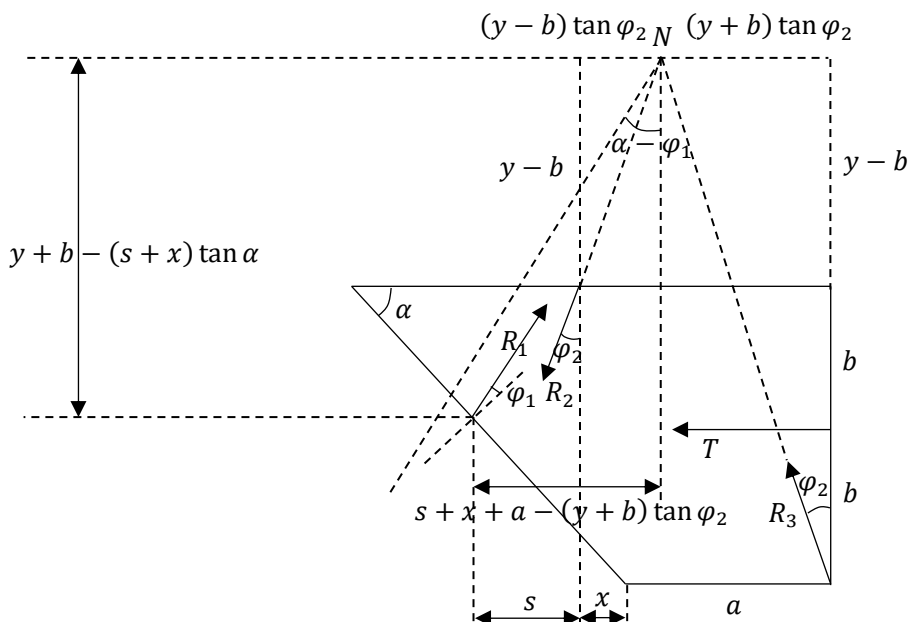
代入 (14*) (15*), 三角变换得条件

$$\mu_1 \mu_2 < 1 \quad (20^*)$$

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} < \tan \alpha \quad (21^*)$$

由上下方向受力平衡，若 (16*) (18*) 式成立，(17*) 式会自动成立。所以下面仅需分别讨论 (16*) 和 (18*) 的成立条件。

先看 (16*) 式。如下图所示，作出 R_2 和 R_3 作用线的交点 N 。



由 N 点处的力矩平衡，为使 (16*) 式成立，因为由几何关系易得 N 点一定在 T 作用线的上方，所以 N 点需在 R_1 作用线的上方，于是得几何关系：

$$(y+b-(s+x)\tan\alpha)\tan(\alpha-\varphi_1) \geq s+x+a-(y+b)\tan\varphi_2 \quad (22^*)$$

所设 y 满足几何关系

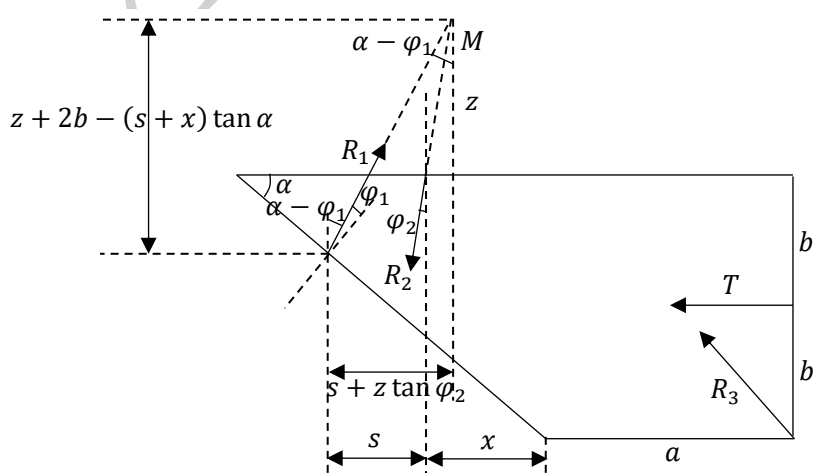
$$(y-b)\tan\varphi_2 + (y+b)\tan\varphi_2 = a+x \quad (23^*)$$

代入得

$$\frac{s+x}{\cos\alpha} \leq \left(\frac{a+x}{2\mu_2} + b\right)(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \mu_2b\right)(\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \quad (24^*)$$

于是，和题干比对得

$$p_3 = \frac{a+x}{2\mu_2} + b \quad (25^*)$$



$$q_3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + \mu_2 b \quad (26^*)$$

再看(18*)式。如上图所示,作出 R_1 和 R_2 作用线的交点 M 。

由前面(16*)式的图,为使(16*)式成立, M 点必在 R_3 作用线的下方。于是,由 M 点处的力矩平衡,为使(18*)式成立,只需满足 M 点在 T 作用线的上方,于是得几何关系:

$$z > -b \quad (27^*)$$

所设 z 满足几何关系

$$s + z \tan \varphi_2 = (z + 2b - (s + x) \tan \alpha) \tan(\alpha - \varphi_1) \quad (28^*)$$

代入得

$$\frac{s + x}{\cos \alpha} \geq b(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) + (x + \mu_2 b)(\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) \quad (29^*)$$

于是,和题干比对得

$$p_2 = b \quad (30^*)$$

$$q_2 = x + \mu_2 b \quad (31^*)$$

(29*)式和(9*)式恰好覆盖了 s 所有的取值,所以(30*)(31*)式和(12*)(13*)式相同。

评分标准: 本题满分 40 分。

解法一每式 1 分, (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) 式各 1 分;

解法二 (6*)(7*)(8*)(22*)(23*)(24*)(27*)(28*)(29*) 式各 2 分, (1*)(2*)(3*)(4*)(5*)(9*)(10*)(11*)(12*)(13*)(14*)(15*)(16*)(17*)(18*)(19*)(20*)(21*)(25*)(26*)(30*)(31*) 各 1 分。

五、(40 分)

考虑一个在真空中的长方体盒子,如图5.1所示,它的三个面是黑体,这三个面各不相对,剩下三个面均为理想反射面。已知黑体面为余弦辐射体,不计宇宙微波背景辐射,初始时刻盒子温度为 T_0 , a, b, c 的面积分别为 A, B, C ,初态静质量为 m_0 。选取这样的惯性系 S' ,使得在 S' 系中,初始时刻立方体以速度 v_0 沿 x 轴负方向运动,并且初始时刻加速度沿 x 轴正方向,与初态的盒子相对静止的惯性系记作 S 系。认为盒子的质量均由光子气贡献,于是有

$$E = \frac{4\sigma T^4}{c} \sqrt{ABC} \quad (5.1)$$

余弦辐射体是指:物体表面单位面积向某方向单位立体角辐射的功率正比于该方向与法

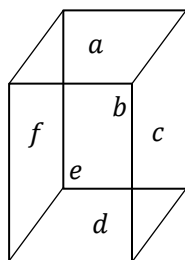


图5.1

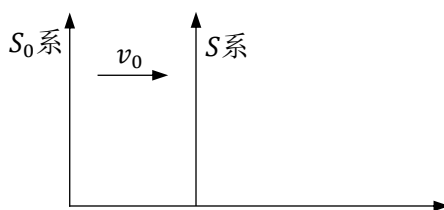


图5.2

线夹角的余弦，也就是

$$\frac{dP}{dA} = C \cos \theta d\Omega \quad (5.2)$$

(1) 已知没有任何别的外力：

(1.1) 试求解在 S 系中长方体的速度 u 与长方体的静质量 m 之间的关系；

(1.2) 试分别在 S 系和 S' 系中求出初态长方体的受力 $\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$ ；

(1.3) 试分别在 S 系和 S' 系中求出初态长方体的加速度；

(2) 现在，引入外力 F 使得长方体始终保持匀速运动，试分别在 S 系和 S' 系中求出长方体本征时改变 τ 时外力 F 的大小。

解：

(1) (1.1)

先考虑一个简单情况：

对于余弦辐射体，由单位面积辐射总功率等于 σT^4 得：

$$\frac{dP}{dA} = \frac{\sigma T^4}{\pi} \cos \theta d\Omega \quad (1)$$

考虑光子的动量在表面法向的投影：

$$\frac{dp_n}{dAdt} = \int \frac{dE}{cdAdt} \cos \theta d\Omega = \frac{2\sigma T^4}{3c} \quad (2)$$

比较发现：

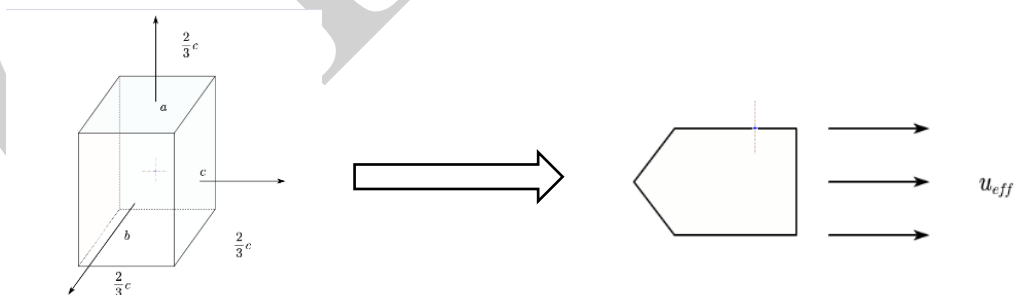
$$\frac{dp_n}{dAdt} = \frac{2}{3} \frac{dE}{cdAdt}$$

也可以写作：

$$\Delta p = \frac{2}{3} c \cdot \frac{E}{c^2} \quad (3)$$

因为物质的动力学性质（不考虑外场）仅和动量、能量相关，所以黑体辐射出的光子整体上可以看作性质（静质量，速度）一样的粒子群，在上面考虑的黑体平面的本征系中，其有效速度为 $\frac{2}{3}c$ 。

因而原体系可以等价于：



$$\frac{\Delta p_{tot}}{\Delta t} = \frac{2\sigma T^4}{3c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta E_{tot}}{\Delta t} = \sigma T^4 (A + B + C) \quad (5)$$

于是“粒子”的有效速度 u_{eff} 为

$$u_{eff} = \frac{\Delta p_{tot}}{\frac{\Delta E_{tot}}{c^2}} = \frac{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{3(A + B + C)}c \quad (6)$$

在瞬时静止系中：

$$du_0 = -\frac{dm}{m}u_{eff} \quad (7)$$

在S系中：

$$du = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)du_0 \quad (8)$$

分离变量并积分得：

$$\frac{u}{c} = \tanh\left(\frac{2u_{eff}}{c} \ln \frac{m_0}{m}\right) = \frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2u_{eff}}{c}}}{1 + \left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{2u_{eff}}{c}}} \quad (9)$$

(1.2)

先求解在S系中的 \vec{F} ：

$$F_x \equiv \frac{dp_x}{dt} = \frac{2\sigma T_0^4}{3c}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, F_y = F_z = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dE}{cdt} = -\frac{\sigma T_0^4}{c}(A + B + C) \quad (11)$$

再求解S'系中的 \vec{F}' ：

思路一：四维矢量

$\left(\gamma \frac{dE}{cdt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$ 是四维矢量：

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v_0}{c} \frac{dE}{cdt} \right) \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \frac{dE'}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(\frac{dE}{cdt} - \frac{v_0}{c} \frac{dp_x}{dt} \right) \quad (13)$$

由 (10) (11) (12) (13) 式得：

$$F'_x \equiv \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\sigma T^4}{c} \left[\frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{v_0}{c} (A + B + C) \right], F'_y = F'_z = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dE'}{dt'} = -\frac{\sigma T^4}{c} \left[(A + B + C) + \frac{v_0}{c} \frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right] \quad (15)$$

思路二：

正如前面讨论过的，我们可以把光子集体视为速度为 u_{eff} 的单向粒子流，所以可以直接借

助速度变换（实际上和能量动量变换是直接等价的）得到S'系中动量，再由钟慢效应得出 $\frac{dp'_x}{dt'}$

“粒子”在S'系中的速度为：

$$u'_{eff} = \frac{u_{eff} + v_0}{1 + \frac{u_{eff}v_0}{c^2}} \quad (16)$$

而：

$$\Delta p_v = -\Delta N m_{eff} \frac{u_{eff}}{\sqrt{1 - \frac{u_{eff}^2}{c^2}}} \quad (17)$$

$$\Delta p'_v = -\Delta N m_{eff} \frac{u'_{eff}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{eff}}{c^2}}} \quad (18)$$

其中 m_{eff} 是“粒子”的有效静质量，考虑钟慢效应：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (19)$$

由 (16) (17) (18) (19) 式和动量守恒得：

$$F' \equiv -\frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} = \frac{\sigma T^4}{c} \left[\frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{v_0}{c} (A + B + C) \right] \quad (20)$$

方向沿 x 轴正方向。

(1.3) 先求 S 系中的加速度

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c^2} v_x \right) = v_x \frac{dE}{dt c^2} + \frac{E}{c^2} \frac{dv_x}{dt} \quad (21)$$

得到 S 系中加速度为：

$$a_x = -\frac{2\sigma T^4}{3m_0 c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (22)$$

下面求 S' 系中的加速度

思路一：运动学

$$du' = \frac{v_0 + du}{1 + \frac{v_0 du}{c^2}} - v_0 \approx \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) du \quad (23)$$

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (24)$$

联立得：

$$a'_x = -\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\sigma T^4}{3m_0 c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (25)$$

思路二：动力学

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{E'}{c^2} v'_x \right) = v'_x \frac{dE'}{dt' c^2} + \frac{E'}{c^2} \frac{dv'_x}{dt'} \quad (26)$$

$$\frac{E'}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (27)$$

联立得：

$$a'_x = -\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2\sigma T^4}{3m_0 c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (28)$$

(2)

先求出 $E(\tau)$

$$\frac{dE}{d\tau} = -\sigma T^4 (A + B + C) \quad (29)$$

又有:

$$E = \frac{4\sigma T^4}{c} \sqrt{ABC} \quad (30)$$

联立得微分方程:

$$\frac{dE}{d\tau} + \frac{c(A + B + C)}{4\sqrt{ABC}} E = 0 \quad (31)$$

解得:

$$E = m_0 c^2 \exp\left(-\frac{c(A + B + C)}{4\sqrt{ABC}} \tau\right) \quad (32)$$

考虑辐射出的光子:

$$\frac{dp_v}{d\tau} = -\frac{2\sigma T^4}{3c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (33)$$

动量守恒:

$$\frac{dp_v}{d\tau} + \frac{dp_{cub}}{d\tau} = F \quad (34)$$

而在 S 系中长方体没有动量变化, 由 (30) (32) (33) (34) 式得:

$$F = -\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} m_0 c^2}{6\sqrt{ABC}} \exp\left(-\frac{c(A + B + C)}{4\sqrt{ABC}} \tau\right) \quad (35)$$

思路一: 利用四维矢量分别求出 $\frac{\Delta p'_v}{\Delta t'}$, $\frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'}$, 进而利用 $F' = \frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} + \frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'}$ 求出外力

由能动量四维矢量:

$$\Delta p'_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(\Delta p_v - \frac{v_0}{c} \frac{\Delta E_v}{c} \right), \Delta p_v = -\frac{\Delta E_v}{c^2} u_{eff} = -\frac{2\sigma T^4}{3c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \Delta \tau \quad (36)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (37)$$

所以

$$\frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} = -\frac{\sigma T^4}{c} \left[\frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{v_0}{c} (A + B + C) \right] \quad (38)$$

对于长方体

$$\frac{\Delta p_{cub}}{\Delta \tau} = 0, \frac{\Delta E_{cub}}{c \Delta \tau} = -\frac{\sigma T^4}{c} (A + B + C) \quad (39)$$

经过类似的推导可以得出:

$$\frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'} = \frac{v_0}{c} \frac{\sigma T^4}{c} (A + B + C) \quad (40)$$

由 (38) (39) (40) 式得

$$F' = \frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} + \frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'} = -\frac{2\sigma T^4}{3c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} m_0 c^2}{6\sqrt{ABC}} \exp\left(-\frac{c(A + B + C)}{4\sqrt{ABC}} \tau\right) \quad (41)$$

思路二: 仍然沿用原来的思想: 把光子集体视为速度为 u_{eff} 的单向粒子流, 然后借助速度

变换得到 $\frac{\Delta p'_v}{\Delta t'}$, 但是这种方法得不出 $\frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'}$, 因为这涉及到 F 的变换, 而这正是我们所求的。

与前面相同:

$$u'_{eff} = \frac{u_{eff} + v_0}{1 + \frac{u_{eff}v_0}{c^2}} \quad (42)$$

而:

$$\Delta p_v = -\Delta N m_{eff} \frac{u_{eff}}{\sqrt{1 - \frac{u_{eff}^2}{c^2}}}, \Delta E_v = \Delta N m_{eff} c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_{eff}^2}{c^2}}} \quad (43)$$

$$\Delta p'_v = -\Delta N m_{eff} \frac{u'_{eff}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{eff}}{c^2}}}, \Delta E'_v = \Delta N m_{eff} c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{eff}}{c^2}}} \quad (44)$$

钟慢效应:

$$\Delta t' = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (45)$$

由 (42) (43) (44) (45) 式得:

$$\frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} = -\frac{\sigma T^4}{c} \left[\frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{v_0}{c} (A + B + C) \right] \quad (46)$$

$$\frac{\Delta E'_v}{c \Delta t'} = \frac{\sigma T^4}{c} \left[(A + B + C) + \frac{v_0}{c} \frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right] \quad (47)$$

动量守恒:

$$F' = \frac{\Delta p'_v}{\Delta t'} + \frac{\Delta p'_{cub}}{\Delta t'} \quad (48)$$

能量守恒:

$$-F' v_0 = \frac{\Delta E'_v}{\Delta t'} + \frac{\Delta E'_{cub}}{\Delta t'} \quad (49)$$

因为长方体匀速运动, 所以:

$$-v_0 = \frac{p'_{cub} c^2}{E'_{cub}} = \frac{\Delta p'_{cub} c^2}{\Delta E'_{cub}} \quad (50)$$

由 (46) (47) (48) (49) (50) 式得:

$$F' = -\frac{2\sigma T^4}{3c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} m_0 c^2}{6\sqrt{ABC}} \exp\left(-\frac{c(A + B + C)}{4\sqrt{ABC}} \tau\right) \quad (51)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1.1) 问 10 分: (1) (2) (6) (9) 式各 2 分, (7) (8) 式各 1 分;

第 (1.2) 问 8 分: (10) 式 2 分,

思路一: (12) (13) (14) 式各 2 分;

思路二: (16) (17) (18) (19) 式各 1 分, (20) 式 2 分;

第 (1.3) 问 4 分: 两个参考系中的加速度各 2 分;

第 (2) 问 18 分: (31) (32) (34) (35) 式各 2 分,

思路一: (36) (37) (38) (40) (41) 式各 2 分;

思路二：(46) (47) (50) (51) 式各 2 分，(48) (49) 式各 1 分。

后记：可以看出，笔者在编写答案时，有时用 $\frac{dp}{dt}$ ，有时用 $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ ，这是为了更好地表现其图

像：用 $\frac{dp}{dt}$ 是把它当成一个整体，与四维力的分量 $\gamma \frac{dp}{dt}$ 联系，而使用 $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 时则通常是把光子当成

“粒子流”进行处理， Δp 则代表所研究的那部分粒子的动量，再用不同方法求解能动量变换。而有的同学会发现，在求解最后一问光子的能动量变换时，笔者没给出直接用四维力变换的解答，这是因为这时会产生一个歧义：在长方体本征系中光子的 $\gamma \frac{dp_v}{dt}$ 中的 γ 是 1 还是

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_{eff}^2}{c^2}}}$ ？同样的问题在 S' 系同样存在： γ' 是使用 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ 还是 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_{eff}'^2}{c^2}}}$ ？这时不妨回到四维力的

图像上，就会发现回到能动量变换和钟慢效应是正确的选择。

六、(40 分)

众所周知，处于重力场中的质点，其具有的重力势能正比于其质量。事实上，我们可以写成 $E_p(\vec{r}) = m \cdot \varphi(\vec{r})$ ，其中 $\varphi(\vec{r})$ 是重力势场。这一表达可以推广到其他一些正比于物体质量的势能上。

以下有一些关于重力势能、惯量张量的知识，你在做本题时可能需要用到它们。

刚体重力势能与转动惯量张量的近似关系

对于刚体，可以将其重力势能近似地写作：

$$\begin{aligned} E_p &= \iiint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV \\ &\approx m \varphi(\vec{r}_c) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\partial_i \partial_j \varphi(\vec{r}_c) \cdot \iiint \rho(\vec{r}) (r_i - r_{ci})(r_j - r_{cj}) dV \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

另外，对于刚体，其绕质心角动量与绕质心角速度的关系可以写成：

$$\vec{J} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (6.2)$$

也就是

$$J_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (6.3)$$

I_{ij} 的具体表达式可以用 $\rho(\vec{r})$ 与体积分表示，但你可以使用一些其他方法获得（见下面关于转动惯量与刚体主轴的信息）。

注意到，对于某些势场， $\nabla^2 \varphi = \sum_i \partial_i \partial_i \varphi(\vec{r}) = 0$ 。代入(1)式与 I_{ij} 的表达式，可以得到无源重力场（以及类似的势场）中，刚体重力势能与其质心位矢 \vec{r}_c 、转动惯量张量（反映了刚体关于质心的位形）的近似关系：

$$E_p \approx m\varphi(\vec{r}_c) - \frac{1}{2} \sum_{ij} (\partial_i \partial_j \varphi) * I_{ij} \quad (6.4)$$

转动惯量张量与刚体的主轴

对于刚体而言，存在着三个互相正交的惯量主轴。转动惯量张量在主轴坐标系中表示为：

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

这意味着给定角动量矢量 $\vec{\omega}$ ，刚体的角动量可以写作 $\vec{J} = I_1(\vec{\omega} \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1 + I_2(\vec{\omega} \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2 + I_3(\vec{\omega} \cdot \hat{e}_3)\hat{e}_3$ ；从而，要求惯量张量在某一坐标系下的某一个分量 I_{ij} ，可以先假设刚体有沿着 \hat{e}_j 方向的角速度 $\omega \hat{e}_j$ ，投影到主轴并求出此时的角动量 \vec{J} ，再将该角动量投影到 \hat{e}_i 方向，从而求出 I_{ij} 。

Part 1.

如图6.1所示，考虑绕地球做圆周运动的无动力、绕一轴线旋转对称的细长物体。对质心而言，平行于轴线的转动惯量分量远小于另外两个主轴上的转动惯量分量（也即图中的 $I_{\parallel} \ll I_{\perp}$ ）。只考虑物体的轴线在垂直于其公转角动量平面内的情况。在地心——物体质心静止的旋转参考系中，物体整体静止，且物体轴线与地心——物体质心连线夹角为 $\theta = 0$ 。如果此时有一个微小的扰动，使得 θ 变成了 $\theta' \ll 1$ ，求小振动的周期。用公转的角频率 Ω 表示。请在解题时使用图示的 (r, ϕ, z) 的柱坐标系。（15 分）

Part 2.

仍然考虑（1）中的情况，但本问认为 $I_{\parallel} \ll I_{\perp}$ 的条件不再适用，不过仍有 $I_{\parallel} < I_{\perp}$ 。在该情况下再求小振动的周期，用 Ω ， I_{\parallel} 和 I_{\perp} 表示。（10 分）

Part 3.

考虑一艘在惯性系中静止于地球上空的飞船。飞船通过喷射燃料维持其高度，且与地心距离为 $r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}}$ 。飞船上固定有一陀螺仪，其核心部件是（2）中所述的物体（陀螺仪能给圆柱体提供力使得其质心相对于飞船静止，但是不会给其提供任何力矩），如图6.2所示（未画出飞船）。飞船上的人观测到，物体的角速度为 $\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_{\phi} + \dot{\psi} \hat{e}_{\psi}$ ，其中 \hat{e}_{ϕ} 的方向不变，一直平行于 \hat{r} 方向，而 \hat{e}_{ψ} 始终平行于物体轴线，且 θ 角能一直保持不变（也即，物体此时在做无章动的进动）。请用 I_{\parallel} ， I_{\perp} 与 Ω ， $\dot{\psi}$ 及 θ 表示 $\dot{\phi}$ 。（15 分）

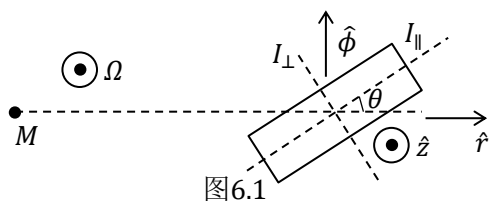


图6.1

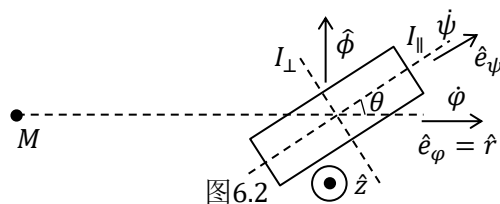


图6.2

解：

Part 1.

在旋转参考系中分析问题。

经过分析易知科里奥利力可以忽略，且公转角速度 Ω 的变化可以忽略。

从而，整体的势场在柱坐标中可以写作（仅考虑 $z = 0$ 的平面）：

$$\varphi = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \quad (1)$$

$$x = 1$$

先求此处重力势场对位置的二阶偏导数，有：

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \frac{GM}{r^2}\hat{r} - \Omega^2 r\hat{r} \\ \nabla\nabla\varphi &= \nabla\left(\frac{GM}{r^2} - \Omega^2 r\right)\hat{r} + \left(\frac{GM}{r^2} - \Omega^2 r\right)\nabla(\hat{r}) \end{aligned} \quad (2)$$

从而我们得知：

$$E_p = \frac{3}{2}\Omega^2 * I_{rr} \quad (3)$$

下面只要求出 I_{rr} 即可。 I_{rr} 的物理意义是： \hat{r} 方向的单位角速度在 \hat{r} 方向上产生的角动量。假设 \hat{r} 方向上有角速度 ω ，容易得知其产生的角动量是：

$$\vec{J} = I_{\perp}(\sin^2\theta\hat{r} - \sin\theta\cos\theta\hat{\phi}) \quad (4)$$

从而有：

$$I_{rr} = I_{\perp}\sin^2\theta \quad (5)$$

由（3）（5）式可得：

$$E_p(\theta) = \frac{3}{2}\Omega^2 I_{\perp}\sin^2\theta \quad (6)$$

易知稳定平衡位置：

$$\theta = 0 \quad (7)$$

从而得到运动方程与振动周期：

$$I_{\perp} \ddot{\theta} = -3\Omega^2 I_{\perp} \sin \theta \cos \theta \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{\Omega} \quad (9)$$

Part 2.

同样的，只要求出 I_{rr} 即可以求出 $E_p(\theta)$ 的具体形式。假设有一个沿着 \hat{r} 方向的角速度 ω ，则刚体的角动量应当为：

$$\vec{J} = I_{\parallel} * \omega \cos \theta * (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\phi}) \quad (10)$$

从而得到：

$$I_{rr} = \frac{\vec{J} \cdot \hat{r}}{\omega} \quad (11)$$

从而有：

$$E_p(\theta) = \frac{3}{2} \Omega^2 (I_{\perp} - I_{\parallel}) \sin^2 \theta + C \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{I_{\perp}}{I_{\perp} - I_{\parallel}}} \quad (13)$$

Part 3.

取飞船静止的惯性系。在该系中，整体的势场可以写作（仍然取柱坐标系）：

$$\varphi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (14)$$

易知，在进动过程中，角速度、角动量与力矩这三个矢量都是绕着 \hat{r} 轴转动的。所以我们只需要考虑角速度矢量在 \hat{r} 与 $\hat{\phi}$ 平面内的瞬间，即可以代表整个进动过程。

事实上，经过简单分析，我们容易知道 Part 1,2 中的离心力其实并不提供力矩。从而，当圆柱体轴线在 \hat{r} 与 $\hat{\phi}$ 构成的平面内时，其收到的力矩应为：

$$\vec{M} = -3\Omega^2 (I_{\perp} - I_{\parallel}) \sin \theta \cos \theta \hat{z} \quad (15)$$

而此时，圆柱体的角动量应当为：

$$\vec{J} = (\psi + \phi \cos \theta) I_{\parallel} (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\phi}) + \phi \sin \theta I_{\perp} (\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\phi}) \quad (16)$$

由于

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M} \quad (17)$$

故

$$\dot{\phi} \vec{J} \cdot \hat{\phi} = \vec{M} \cdot \hat{z} \quad (18)$$

代入整理可得：

$$\dot{\phi}^2 - \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} - I_{\parallel} \cos \theta} \dot{\psi} \dot{\phi} - 3\Omega^2 = 0 \quad (19)$$

解之得到：

$$\dot{\phi} = \frac{\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} - I_{\parallel} \cos \theta} \dot{\psi} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} - I_{\parallel} \cos \theta} \dot{\psi}\right)^2 + 12\Omega^2}}{2} \quad (20)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第一问 15 分：(2) (5) (6) (7) 式各 2 分，(9) 式 3 分。说明科里奥利力和公转角速度变化可以忽略各 1 分；说明离心力不产生力矩，或者写出 (1) 式，二者只要做到其一即得 2 分。如果使用其他方法，当且仅当 (7) (9) 式都正确才给全 15 分。

第二问 10 分：(11) (13) 式各 5 分。如果使用其他方法，当且仅当 (13) 式正确才给全 15 分。

第三问 15 分：(16) 式 2 分，(17) 式 3 分，(15) (20) 式各 5 分。

P.S.如果飞船绕地心做无动力圆周运动，那么不能观察到由于重力场不均匀引起的进动现象；其原因是科里奥利力在任何情况下都无法忽略。但是如果在某些情况下，重力场的不均匀性可以忽略，从而可以观察到由科里奥利力引起的进动；但是这一进动与动力学已经无关，是因为平动参考系中角动量守恒导致了旋转参考系中的进动现象。

P.P.S.用与 Part 1 中相同的方法计算 Part 3 中圆柱体受到的力矩，并验证 (15) 式：

$$\nabla \varphi(r, \phi, z) = \frac{GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (r\hat{r} + z\hat{z}) \quad (21)$$

$$\nabla \nabla \varphi(r, \phi, 0) = -2\Omega^2 \hat{r}\hat{r} + \Omega^2 \hat{\phi}\hat{\phi} + \Omega^2 \hat{z}\hat{z} \quad (22)$$

另解：在第一问中我们仅仅考虑了 $\nabla \nabla \varphi(r, \theta, 0)$ 对 \hat{r} 与 $\hat{\phi}$ 方向造成的影响 $-2\Omega^2 \hat{r}\hat{r} + \Omega^2 \hat{\phi}\hat{\phi}$ ，根据 $\hat{\phi}$ 与 \hat{z} 这两个方向的等价性也可以得到 (21) 式。容易验证 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

易知，在进动过程中，角速度、角动量与力矩这三个矢量都是绕着 \hat{r} 轴转动的。所以我们只需要考虑角速度矢量在 \hat{r} 与 $\hat{\phi}$ 平面内的瞬间，即可以代表整个进动过程。

为此，我们先求出 $I_{\phi\phi}$ 。假设存在一个沿着 $\hat{\phi}$ 方向的角速度 ω ，则刚体的角动量应当为：

$$\vec{J} = I_{\parallel} * \omega \sin \theta * (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\phi}) \quad (23)$$

从而

$$I_{\phi\phi} = I_{\perp} \cos^2 \theta + I_{\parallel} \sin^2 \theta \quad (24)$$

将(11)式,(22)式与(24)式代入(3)式可得:

$$E_p(\theta) = \frac{3}{2} \Omega^2 (I_{\perp} - I_{\parallel}) \sin^2 \theta + C \quad (25)$$

从而也同样可以得到(15)式。

七、(80 分)

神奇的平面应力问题

本题将从弹性力学平面应力问题与静电学问题基本方程的等价性出发,引导大家解决一系列弹性力学问题。

Part 1. 基本概念

如图7.1所示,建立平面直角坐标系来描述图中阴影部分的二维弹性体。

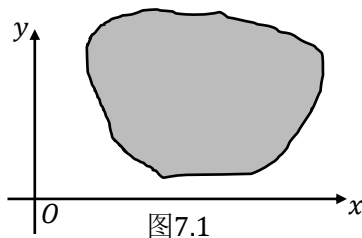


图7.1

当一个弹性体受到外力时其内部会发生拉伸或压缩,由此产生内力,而应力就是描述弹性体内部内力细节的物理量。具体而言应力分为两种——正应力与切应力。如图7.2所示,在所研究弹性体中用任意曲线截取一个小弹性体,令其为A,而余下部分令为B。显然A与B两部分会发生相互作用,考虑A与B相接触的P点,A在该点会同时受到法向力与切向力。A在单位长度受到的法向力被定义为正应力,用 σ 表示;而单位长度受到的切向力被定义为切应力,用 τ 表示。值得注意的是,正应力与切应力不止是坐标 (x,y) 的函数,所选择的曲线方向也很重要。

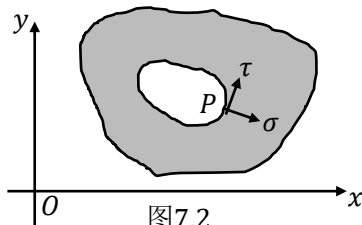


图7.2

Part 2. 平面直角坐标下的应力描述

考虑到应力大小与方向有关,为求解方便,可以只沿着平行于坐标轴的方向截取线段进行研究。如图7.3所示,在坐标 (x,y) 处截取一个 $dx dy$ 的小微元,定义沿着x轴的正应力为 σ_x ,

沿着 y 轴的正应力为 σ_y ，沿着 y 轴的切应力为 τ_{xy} ，沿着 x 轴的切应力为 τ_{yx} 。正应力的正方向规定为背向微元区域的方向，而切应力的正方向则根据正应力的正方向指定。以 τ_{xy} 为例，若这一条线段上的正应力正方向为 x 轴正方向， τ_{xy} 正方向为 y 轴正方向；反之 τ_{xy} 的正方向为 y 轴负方向， τ_{yx} 的正方向定义同理。图中画出了部分正应力与切应力的正方向供参考。

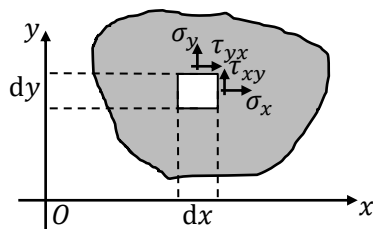


图7.3

(1) 有了如上的定义便可以建立 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 与 τ_{yx} 所满足的微分方程。以下所有问题均考虑弹性体不受体力或体力矩的情况，这里截取的 $dx dy$ 的微元应当在 x 方向上受力平衡，即有

$$-\sigma_x(x, y)dy + \sigma_x(x + dx, y)dy - \tau_{yx}(x, y)dx + \tau_{yx}(x, y + dy)dx = 0 \quad (7.1)$$

化简后有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (7.2)$$

请仿照以上过程建立微元 y 方向受力平衡与力矩平衡所对应的方程。(6分)

(2) 为了求解实际问题，还需要一定的边界条件。以如图7.4所示的问题为例，太空中有一个长为 a 宽为 b 的长方形弹性体，其一端被固定在 y 轴上，其余各表面均自由。现在在 (a, h) 处施加一个沿着 x 轴的拉力 F 拉动弹性体，试列出弹性体应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 与 τ_{yx} 在三个自由边界，即 $y = 0$ 、 $y = b$ 与 $x = a$ 处所满足的边界条件。(6分)

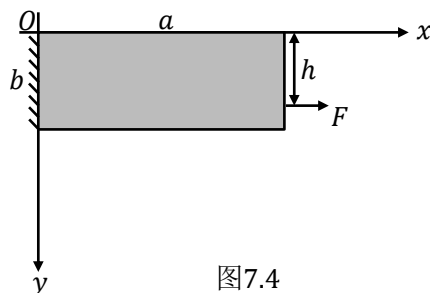


图7.4

(3) 弹性力学圣维南原理指出：分布于弹性体上一小块面积（二维情形则是一小段长度）上的外力所引起的弹性体中的应力，在离外力作用区稍远的地方，基本上只同外力的合力和合力矩有关；外力的具体分布只影响外力作用区附近的应力分布。举个简单的例子，如图7.5所示，手捏住手镯一端，若不考虑重力，手所施加的外力的合力为零。那么在远离手所捏区域的地方，手镯中基本不会存在应力。换句话说，手捏住手镯一端，手镯另一端基本不会拉



图7.5

伸或是压缩，这一结论非常符合物理直觉。回到 (2) 的问题，若给定 $a \gg b$ ，试写出 $x = 0$ 处的应力边界条件。(3 分)

(4) 在 (1) 中的微分方程和适当的边界条件下已经可以解出一个弹性体的应力分布 $\sigma_x(x, y)$ 、 $\sigma_y(x, y)$ 、 $\tau_{xy}(x, y)$ 、 $\tau_{yx}(x, y)$ ，但有时候需要的并非平行于坐标轴的线段上的应力，而是与 x 轴有一定夹角的线段上的应力。如图 7.6 所示，考虑一个与 x 轴夹 θ 角的小线段，求这一线段上的正应力与切应力大小，再给出使得正应力取得极值的角度 θ_0 ，答案均用该点对应的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 表示。(13 分)

Part 3. 应力函数

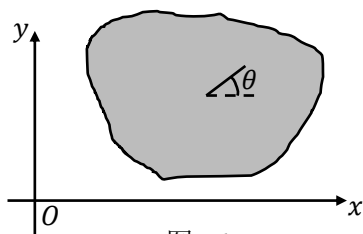


图 7.6

为求解 Part 2 中的微分方程组，引入应力函数 $\phi(x, y)$ ，其与应力的关系为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{cases} \quad (7.3)$$

而原先应力所满足的偏微分方程组也可改写为

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (7.4)$$

利用应力函数 ϕ ，在 $a \gg b$ 的条件下改写 Part 2 中弹性力学问题的边界条件。(4 分)

Part 4. 极坐标下的应力描述

如图 7.7 所示，类似平面直角坐标系，可以在极坐标系下描述应力，图中给出了 $drd\varphi$ 对应的小面积元所受到的应力。

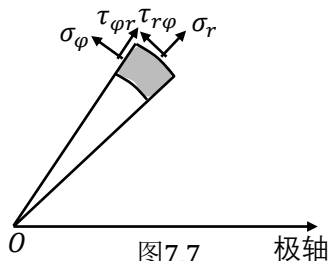


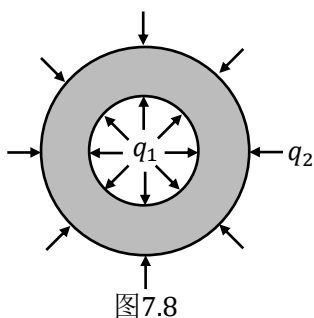
图 7.7

不加证明给出在 Part 3 中定义的应力函数 ϕ 与应力所满足的关系如下：

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \end{cases} \quad (7.5)$$

因此仍然可以用 $\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0$ 来代替应力所满足的偏微分方程组，而再加以适当的边界条件在极坐标下解决特定的平面应力问题。

如图7.8所示为地底深处一管道的截面，管道内径为 a ，外径为 b 。管道内流动的水给管道内壁施加了单位长度大小为 q_1 的均匀压力，而外部的泥土给管道施加了单位长度大小为 q_2 的均匀压力。以管道中心为原点建立极坐标系，不考虑重力（这一假设看似很奇怪，但在这一问题中重力的确没有影响），写出应力函数 ϕ 所满足的边界条件。（8分）



Part 5. 平面应力问题的静电学解法

此部分解答请书写在答题纸的第八题对应区域

注意到应力函数所满足的微分方程 $\nabla^2(\nabla^2\phi) = 0$ 与静电学中的泊松方程

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

具有相似性，因此可以构造一个静电学体系使得其中的电势 U 与 $\nabla^2\phi$ 或 ϕ 满足相同的微分方程与边界条件，再通过求解静电学问题从而得到平面应力问题的解。

（1）构造静电学体系，证明 Part 4 所提出的问题中 $\nabla^2\phi$ 具有形式

$$\nabla^2\phi = a + b \ln r \quad (7.7)$$

其中 a 、 b 均为常数。（10分）

（2）构造静电学体系，证明 Part 4 所提出的问题中 ϕ 具有形式

$$\phi = A + B \ln r + Cr^2 \ln r + Dr^2 \quad (7.8)$$

其中 A 、 B 、 C 、 D 均为常数。（10分）

（3）利用（2）的结论，求解应力函数 ϕ 。（10分）

(4) 如图7.9所示, 考虑半无限大弹性体中的一个半径为 a 的空腔, 空腔单位长度受到均匀压力 q , 其到弹性体边缘距离为 h , 有 $h \gg a$ 。以弹性体边缘为 y 轴建立直角坐标系, 空腔中心坐标为 $(-h, 0)$, 求远离空腔的任意 (x, y) 处的应力函数 ϕ 。(10 分)

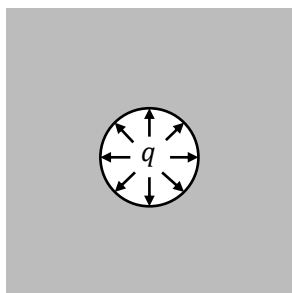


图7.9

解:

Part 2 (1)

同理列 y 方向受力平衡有

$$-\sigma_y(x, y)dx + \sigma_y(x, y + dy)dx - \tau_{xy}(x, y)dy + \tau_{xy}(x + dx, y)dy = 0$$

化简得到

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

以所研究的区域中心为轴列力矩平衡方程, 由于正应力过轴不产生力矩, 因此只需要考虑切应力产生的力矩即可, 有

$$\tau_{xy}dxdy - \tau_{yx}dxdy = 0$$

即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2)$$

Part 2 (2)

在 $y = 0$ 处:

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{yx} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

在 $y = b$ 处:

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{yx} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

在 $x = a$ 处:

$$\begin{cases} \sigma_x = F\delta(y - h) \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

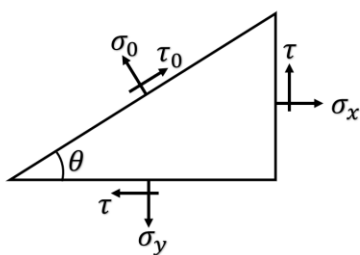
Part 2 (3)

由圣维南原理, 考虑 $x = 0$ 处的应力分布时可将拉力 F 均匀分布在 $x = a$ 的线段上, 于是弹性体均匀拉伸, $x = 0$ 处单位长度拉力为 $\frac{F}{b}$, 即在 $x = 0$ 处有

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{F}{b} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Part 2 (4)

如图考虑分析一个三角形的受力平衡, 由于 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 因此这里统一记作 τ . 图中 σ_0 与 τ_0 即为所求。



设三角形斜边长度为 a , x 方向受力平衡有

$$\sigma_x \sin \theta a - \tau \cos \theta a + \tau_0 a \cos \theta - \sigma_0 a \sin \theta = 0 \quad (7)$$

y 方向受力平衡有

$$\tau \sin \theta a - \sigma_y \cos \theta a + \tau_0 a \sin \theta + \sigma_0 a \cos \theta = 0 \quad (8)$$

解得

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - 2 \sin \theta \cos \theta \tau \\ \tau_0 = \sin \theta \cos \theta (\sigma_y - \sigma_x) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau \end{cases} \quad (9)$$

对 (9) 式取绝对值即得到正应力与切应力大小, 而要找最大正应力所对应的 θ , 可简单改写 σ_0 为

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau \sin 2\theta \quad (10)$$

于是 θ_0 满足

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (11)$$

Part 3

这一部分纯送分，利用题目条件改写（3）至（6）式中的 σ_x, σ_y 与 τ 即可。

Part 4

在 $r = a$ 处有

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = -q_1 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

在 $r = b$ 处有

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = -q_2 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Part 5 (1)

注意到有

$$\nabla^2 \phi = \sigma_r + \sigma_\varphi$$

体系具有旋转对称性，因此 ϕ 只与 r 有关。在 $r = a$ 与 $r = b$ 处， σ_φ 具体的值虽然无从得知，但其与 φ 无关是可以确定的——也就是说在 $r = a$ 与 $r = b$ 处 σ_φ 是常数，进而在 $r = a$ 与 $r = b$ 处 $\nabla^2 \phi$ 是常数。

考虑半径分别为 a 与 b 的两个共轴圆柱导体，二者各有一个电势值，那么电势 U 在两导体之间区域所满足的微分方程，以及电势 U 所满足的边界条件就与 $\nabla^2 \phi$ 相同。利用高斯定理不难证明电势 U 具有题设形式，于是 $\nabla^2 \phi$ 也具有题设形式。

Part 5 (2)

同样由于旋转对称性， ϕ 在 $r = a$ 与 $r = b$ 处的值为常数。考虑到 ϕ 满足方程

$$\nabla^2 \phi = A_0 + B_0 \ln r$$

可以同样构造两个共轴圆柱导体，二者各带有一个电势，导体之间填充了密度分布为

$$\rho_e = A_0 + B_0 \ln r \quad (14)$$

的电荷（由于只考虑解的形式，这里忽略直接搬运系数所带来的量纲问题），此时电势 U 所满

足的微分方程以及边界条件就和 ϕ 完全相同了。

为了求出 U ，可以使用高斯定理。假设内导体电荷线密度为 λ ，于是半径为 r 的单位长度高的圆柱内的总电荷量为

$$\lambda + \int_a^r (A_0 + B_0 \ln \rho) \cdot 2\pi\rho d\rho \quad (15)$$

其结果形式为

$$M + Nr^2 + Qr^2 \ln r \quad (16)$$

其中 M 、 N 、 Q 均为常数。根据高斯定理，电场 E 具有形式

$$E = \frac{M}{r} + Nr + Qr \ln r \quad (17)$$

再对电场 E 积分，不难得到最终电势满足题目形式。

Part 5 (3)

只需将 $\phi = A + B \ln r + Cr^2 \ln r + Dr^2$ 带入(12)(13)式共同构成的边界条件即可，最终解得

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{a^2 b^2 (q_2 - q_1)}{b^2 - a^2} \\ C = 0 \\ D = \frac{q_1 a^2 - q_2 b^2}{2(b^2 - a^2)} \end{cases} \quad (18)$$

Part 5 (4)

根据电像法的思路，只需要将空腔关于边界对称，获得一个内部有均匀压力 $-q$ 的空腔即可。两个空腔各自影响合成起来，即可同时满足偏微分方程和边界条件。原问题中的应力分布也就等价于在无限大空间中放两个空腔的应力分布。

对 Part 4 中的问题取 $b = \infty, q_2 = 0$ 的极限，即得一个空腔产生的应力函数为

$$\phi = -a^2 q \ln r \quad (19)$$

其中 r 为场点到空腔中心的距离。在无限大弹性体中利用叠加原理，得原半无限大弹性体中应力函数分布为

$$\phi(x, y) = \frac{a^2 q}{2} \ln \left[\frac{(x - h)^2 + y^2}{(x + h)^2 + y^2} \right] \quad (20)$$

评分标准：本题满分 80 分。

Part 2 共 28 分：

(1) (2) 式各 3 分，(3) (4) (5) 式各 2 分，(6) 式 3 分，(7) (8) 式各 2 分，(9) 式 5 分，(11) 式 4 分；

Part 3 共 4 分：

说明如何修改原 (3) 至 (6) 式，4 分；

Part 4 共 8 分：

(12) (13) 式各 4 分；

Part 5 (1) 共 10 分：

说明 $\nabla^2 \phi$ 在 $r = a$ 与 $r = b$ 处的值是常数 5 分，建立静电学问题并说明题目形式成立 5 分；

Part 5 (2) 共 10 分：

建立静电学问题 6 分，利用高斯定理计算电场形式 2 分，说明题目形式成立 2 分；

Part 5 (3) 共 10 分：

(18) 式中四个系数， A 与 C 各 2 分， B 与 D 各 3 分；

Part 5 (4) 共 10 分：

利用电像法思路构造像空腔 5 分，对 Part 5 (3) 的结论取极限获得 (19) 式 2 分，利用叠加原理得到最终结论 (20) 式 3 分。